Collège La Mare aux Champs
VAUX LE PENIL

Brevet Blanc de Mathématiques 04/2006

Partie I Activités Numériques

Exercice 1 :

1) $A = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} : \frac{35}{12}$

$= \frac{1}{3} + \frac{14}{3} x \frac{12}{35}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2 \text{ x } \cancel{7} \text{ x } \cancel{3} \text{ x } 4}{\cancel{3} \text{ x } 5 \text{ x } \cancel{7}}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2x4}{5}$

$= \frac{1}{3} + \frac{8}{5}$

$= \frac{5}{15} + \frac{24}{15}$

$\boxed{\mathbf{A = \frac{29}{15}}}$

2) $B = \frac{81 \text{ x } 10^{-5} \text{ x } 14 \text{ x } (10^2)^3}{7 \text{ x } 10^4}$

$= \frac{81 \text{ x } 10^{-5} \text{ x } 10^6 \text{ x } 2 \text{ x } 7}{7 \text{ x } 10^4}$

$= 162 \text{ x } 10^{-5+6-4}$

$= \left.\begin{array}{l} \mathbf{162 \text{ x } 10^{-3}} \\ \mathbf{0{,}162} \\ \mathbf{1{,}62 \text{ x } 10^{-1}} \end{array}\right\}$ Réponses acceptées

3) $C = 2\sqrt{50} \quad 3\sqrt{8} + 7\sqrt{18}$

$= 2\sqrt{25x2} \quad 3\sqrt{4x2} + 7\sqrt{9x2}$

$= 2x5\sqrt{2} \quad 3x2\sqrt{2} + 7x3\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2} \quad 6\sqrt{2} + 21\sqrt{2}$

$\boxed{\mathbf{C = 25\sqrt{2}}}$

4) $D = \left(3 \quad \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \quad \sqrt{169}$

$= 3^2 \quad 5 + 4x3 \quad 13$

$= 9 \quad 5 + 12 \quad 13$

$\boxed{\mathbf{D = 3}}$ **D est donc un entier**

Exercice 2 :

1) $E = \left(3x \quad 1\right)(x + 5) \quad \left(3x \quad 1\right)^2$

$= 3x^2 + 14x \quad 5 \quad (9x^2 \quad 6x + 1)$

$= 3x^2 + 14x \quad 5 \quad 9x^2 + 6x \quad 1$

$\boxed{\mathbf{E = \quad 6x^2 + 20x \quad 6}}$

2) $E = \left(3x \quad 1\right)(x + 5) \quad \left(3x \quad 1\right)^2$

$= \left(3x \quad 1\right)\left[x + 5 \quad \left(3x \quad 1\right)\right]$

$\boxed{\mathbf{E = \left(3x \quad 1\right)\left(\quad 2x + 6\right)}}$

3) $\left(3x \quad 1\right)\left(\quad 2x + 6\right) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc

$3x \quad 1 = 0$ ou $\quad 2x + 6 = 0$

soit $x = \frac{1}{3}$ ou $x = 3$

$\boxed{\textbf{L'équation admet 2 solutions qui sont } \mathbf{\frac{1}{3}} \textbf{ et } \mathbf{3}}$.

Exercice 3 :

1) Les nombres donnés 2698 et 2052 sont tous deux pairs. Ils ont pour diviseur commun le nombre 2 (et sans doute d'autres diviseurs dont la détermination n'est pas nécessaire pour répondre à la question). Leur PGCD n'est pas égal à 1.

Les nombres donnés ne sont donc pas premiers entre eux.

2) Déterminons le PGCD des nombres 2698 et 2052 par la méthode de l'algorithme d'Euclide :

a	b	*q*	r
2698	**2052**	*1*	**646**
2052	**646**	*3*	**114**
646	**114**	*5*	**76**
114	**76**	*1*	***38***
76	**38**	*2*	**0**

Le dernier reste non nul est 38. C'est le PGCD des deux nombres.

Conclusion : **PGCD(2052 ; 2698) = 38**

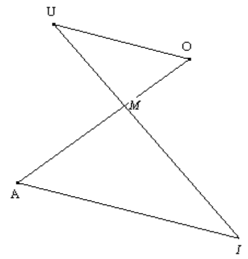
3) Simplifions la fraction $\frac{2052}{2698}$ pour la rendre irréductible. Pour cela, divisons les deux entiers par leur PGCD.

On obtient : $\frac{2052}{2698} = \frac{54x38}{71x38} = \boxed{\mathbf{\frac{54}{71}}}$

Partie II Activités Géométriques

Exercice 1 :

1) Les droites (UI) et (AO) sont sécantes en M :



Calculons séparément $\frac{MA}{MO}$ et $\frac{MU}{MI}$;

$$\frac{MA}{MO} = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{MU}{MI} = \frac{36}{28} = \frac{9}{7}$$

Les points U,M, I et les points O,M, A étant alignés dans le même ordre, en appliquant la réciproque du théorème de Thalès, on peut conclure que **les droites (OU) et (AI) sont parallèles**.

2) Dans le triangle AMI, le côté le plus long est [AI]. Calculons séparément AI² et AM²+ MI² ;

$AI^2 = 45^2 = \boldsymbol{2025}$

$AM^2 + MI^2 = 27^2 + 36^2 = \boldsymbol{2025}$

On remarque que $AM^2 + MI^2 = AI^2$ donc, en appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on peut conclure que **le triangle AMI est rectangle en M**.

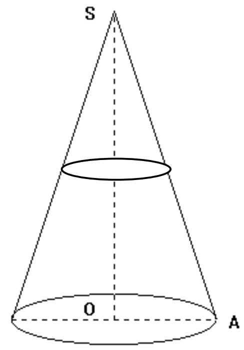
3) Le triangle AMI étant rectangle en M, les droites (UI) et (AO) sont donc perpendiculaires.

Dans le triangle UOM, rectangle en M, calculons la tangente de l'angle $\widehat{MUO}$:

$$\tan \widehat{MUO} = \frac{MO}{MU} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} \text{ donc } \boxed{\widehat{MUO} = 37°}$$

Exercice 2 :

1) Calculons le volume exact du cône :



$$\mathcal{V} = \frac{B\text{x}h}{3} = \frac{\pi \text{ x } R^2 \text{ x } h}{3} = \frac{\pi \text{ x } 5^2 \text{ x } 9}{3} = \boxed{75\pi \text{ cm}^3}$$

2) On coupe le cône par un plan parallèle à sa base. Le petit cône obtenu est une réduction du cône initial.

Calculons le coefficient de réduction :

$$k = \frac{\text{longueur du petit cône}}{\text{longueur } \textbf{correspondante} \text{ du grand cône}}$$

$$k = \frac{SM}{SO}$$

$$k = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{3}}$$

Calculons maintenant le volume $\mathcal{V}'$ du cône réduit :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \text{ x } k^3 = 75\pi \text{ x } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boxed{\frac{75\pi}{27} \text{ cm}^3}$$

$$\boxed{\mathcal{V}' = 9 \text{ cm}^3 \text{ à } 1 \text{ cm}^3 \text{ près}}$$

Exercice 3 **: voir la figure**

Partie III Problème

1ère partie

1) $f(x) = 40 \quad 4x$

Calculons l'image de 0 par la fonction f :

$f(0) = 40 \quad 4\text{x}0 = 40$

L'image de 0 par f est 40.

2) Déterminons le nombre qui, par f, a pour image 16 :

On cherche le nombre x tel que $f(x) = 16$ soit $40 \quad 4x = 16$ donc $x = \frac{24}{4} = 6$.

Le nombre qui a pour image 16 par f est 6.

3) La fonction f est affine.

Sa représentation graphique est une droite ne passant pas par l'origine du repère (b≠ 0).

Pour tracer cette droite, il suffit de déterminer les coordonnées de deux points distincts qui vérifient $f(x) = 40 \quad 4x$.

Par exemple : A(0 ; 40) et B (10 ; 0)

4) Par lecture graphique, on peut observer que $\boxed{\textbf{le nombre qui a pour image 10 par } f \textbf{ est 7,5}}$.

2ème partie :

1) Le quadrilatère IJKL est la section de la pyramide par un plan parallèle à sa base. IJKL est donc de même nature que la base HEFG de la pyramide. $\boxed{\textbf{IJKL est un rectangle}}$.

2) Voir figure.

3) On sait que **IH = 4 cm**

a) Calculons DI.

I est un point du segment [DH] donc DI = DH HI = 10 4 = 6 cm. $\boxed{\textbf{DI = 6 cm}}$

b) Dans le triangle DEH, on sait que :

- I ∈ [IH]
- J ∈ [DE]
- (IJ) // (EH)

En appliquant la propriété de Thalès, on peut écrire que:

$$\frac{DI}{DH} = \frac{DJ}{DE} = \frac{IJ}{EH} \text{ donc } \frac{6}{10} = \frac{IJ}{8} = \frac{DJ}{DE} \text{ d'où } \boxed{\mathbf{IJ = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8\ cm}}.$$

c) De même, dans le triangle DEH, en appliquant la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{DI}{DH} = \frac{DJ}{DE} = \frac{IJ}{EH} \quad \text{d'où} \quad \frac{6}{10} = \frac{DL}{DG} = \frac{IL}{12} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathbf{IL = \frac{12 \times 6}{10} = 7{,}2\ cm}}.$$

d) Le périmètre d'un rectangle est égal à 2x(longueur+largeur) donc ;

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathbf{IJKL}} \mathbf{= 2(IJ + IL) = 2x\ (4{,}8 + 7{,}2) = 2{,}4\ cm}}.$$

4) On sait maintenant que **IH = x cm**

a) En utilisant les mêmes calculs qu'aux questions 3)a), b), c), et d) , on a :

$$\boxed{\mathbf{DI = 10 \quad x}}$$

$$IJ = \frac{(10 \quad x) \times 8}{10} = \frac{80 \quad 8x}{10} = 8 \quad \frac{4}{5}x \ ; \ \boxed{\mathbf{IJ = 8 \quad \frac{4}{5}x}}$$

$$IL = \frac{12 \times (10 \quad x)}{10} = \frac{6 \times (10 \quad x)}{5} = \frac{60 \quad 6x}{5} = 12 \quad \frac{6}{5}x \ ; \ \boxed{\mathbf{IL = 12 \quad \frac{6}{5}x}}$$

b) Le périmètre de IJKL devient :

$$\mathcal{P}_{IJKL}(x) = 2x\left(8 \quad \frac{4}{5}x\right)\left(12 \quad \frac{6}{5}x\right) = 2x(20 \quad 2x) = 40 \quad 4x \ ; \ \boxed{\mathcal{P}_{\mathbf{IJKL}}\mathbf{(x) = 40 \quad 4x}}$$

c) On remarque que $\mathcal{P}_{IJKL}(x) = f(x)$

On cherche où il faut placer I sur [DH] pour que $\mathcal{P}_{IJKL}(x) = 10$ cm.

Cela équivaut à $f(x) = 10$ cm et, d'après la 1ère partie question 4), il faut que x soit égal à 7,5 cm.

$\boxed{\textbf{Il faut donc placer I sur [DH] à 7,5 cm de I soit IH = 7,5 cm}}$.