Correction du Brevet Blanc $3^{ème}$ mars 2011

Activités Numériques

Exercice 1 :

Question $\boxed{\text{n° 1}}$: réponse $\boxed{B}$ $6 - 4(x - 2) = 6 - 4x + 8 = 6 + 8 - 4x = \mathbf{14 - 4x}$

Question $\boxed{\text{n° 2}}$: réponse $\boxed{C}$ $(2x - 3)^2 = \mathbf{4x^2 - 12x + 9}$

Question $\boxed{\text{n° 3}}$: réponse $\boxed{C}$ $\sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

Question $\boxed{\text{n° 4}}$: réponse $\boxed{B}$ $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \mathbf{\frac{1}{12}}$

Question $\boxed{\text{n° 5}}$: réponse $\boxed{D}$ 100% – 5% = 95% ; 1200 x 95% = **1140 €**

Exercice 2 :

1) Appliquons le programme de calcul à +7 :

A = 7 + 5 = 12 ; B = 7 – 5 = 2 ; A x B = 12 x 2 = 24 ; $C = 7^2 = 49$; D = A x B – C = 24 – 49 = $\boxed{\mathbf{-25}}$

Appliquons le programme de calcul à –3 :

A = –3 + 5 = 2 ; B = –3 – 5 = -8 ; A x B = 2 x(–8) = –16 ; $C = (-3)^2 = 9$; D = A x B – C = –16 – 9 = $\boxed{\mathbf{-25}}$

Conjecture : on trouve deux fois D = –25. Obtient-on toujours D = –25 quel que soit le nombre x choisi au départ ?

2) Exprimons A, B, C en fonction de x :

$\boxed{A = x + 5}$; $\boxed{B = x - 5}$; $\boxed{C = x^2}$

Calculons D = A x B – C

$\boxed{D = (x + 5)(x - 5) - x^2}$

Développons et réduisons cette expression littérale :

$A = x^2 - 5^2 - x^2$

Donc, $\boxed{A = -25}$ ce résultat est indépendant de la valeur de x choisie au départ.

Nous avons donc démontré que quel que soit le nombre x choisi au départ, l'expression D est toujours égale à –25.

Exercice 3 :

1) Pour pouvoir faire 51 lots comprenant autant de cookies que de muffins, il faut que les nombre 663 et 442 soient tous deux divisibles par 51.

Or, $\boxed{663 \div 51 = 13}$ et $\boxed{442 \div 51 \approx 8{,}6666\ldots}$

Si le nombre 663 est divisible par 51, le nombre 442 ne l'est pas.

Il ne sera donc pas possible de faire 51 lots de même composition de muffins et de cookies.

2) Pour trouver le plus grand nombre de lots qu'on pourra faire avec tous les muffins et tous les cookies, **il faut calculer le plus grand diviseur commun aux deux nombres entiers 663 et 442.**

Trois méthodes sont possibles : - la recherche de tous les diviseurs des deux nombres pour trouver le plus grand commun
- la méthode par soustractions successives
- la méthode de l'algorithme d'Euclide.

La $3^{ème}$ méthode étant généralement la plus rapide, c'est celle que nous utilisons. Présentons les résultats des divisions euclidiennes dans un tableau :

a (dividende)	**b** (diviseur)	**r** (reste)	**a = bxq = r**
663	442	221	663 = 442x2 + 221
442	221	0	442 = 221x2 + 0

Le PGCD de 663 et 442 est le dernier reste non nul, donc PGCD(663 ; 442) = 221.

Le plus grand nombre de lots que les élèves pourront réaliser est donc 221.

3) Composition de chaque lot :

$\boxed{663 \div 221 = 3}$; $\boxed{442 \div 221 = 2}$

Dans chacun des 221 lots, il y aura donc 3 muffins et 2 cookies.

4) Calculons le bénéfice de cette vente.

Chaque lot est vendu 1,5€ et la fabrication a coûté 56,84€ donc:

$\boxed{B = 221 \times 1{,}5 - 56{,}84 = 331{,}5 - 56{,}84 = 274{,}66\ €}$

Grâce à leur initiative, les élèves pourront disposer de 274,66€ pour financer leur voyage scolaire.

Activités Géométriques

Exercice 1 :

1) Démontrons que BC = 7,5.

Dans le triangle ABC, on sait que :

- AE = 3 ; AB = 4,5 ; AC = 6 ; EF = 5
- les droites (EF) et (BC) sont parallèles
- E $\in$ [AB] ; F $\in$ [AC]

Dans le triangle ABC, en appliquant le t**héorème de Thalès**, on a :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

D'où, en remplaçant les longueurs par les valeurs connues

$$\frac{3}{4,5} = \frac{AF}{6} = \frac{5}{BC}$$

Donc $\frac{3}{4,5} = \frac{5}{BC}$ ce qui donne $\boxed{\mathbf{BC = \frac{4,5 \times 5}{3} = 7,5}}$

Le segment [BC] mesure 7,5 cm.

2) Pour savoir si les droites (KG) et (BC) sont parallèles, comparons les rapports $\frac{AK}{AC}$ et $\frac{AG}{AB}$:

- $\frac{\mathbf{AK}}{\mathbf{AC}} = \frac{2,8}{6} = \frac{28}{60} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$
- $\frac{\mathbf{AG}}{\mathbf{AB}} = \frac{2,1}{4,5} = \frac{21}{45} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}}$

On remarque que les rapports $\frac{AK}{AC}$ et $\frac{AG}{AB}$ sont égaux.

***Les points K, A, C d'une part et G, A, B d'autre part étant alignés dans le même ordre*, la *réciproque* du théorème du Thalès permet de conclure que les droites (KG) et (BC) sont parallèles**.

3) Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si le triangle ABC est rectangle en A. Le plus long côté du triangle étant [BC], calculons séparément $AB^2 + AC^2$ et BC^2 :

- $\mathbf{AB^2 + AC^2} = 4,5^2 + 6^2 = \mathbf{56,25}$
- $\mathbf{BC^2} = 7,5^2 = \mathbf{56,25}$

On remarque BC^2 est égal à $AB^2 + AC^2$.

En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on, peut conclure que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 2 :

1) Calculons la longueur CH :

Dans le triangle CAH, rectangle en H, exprimons la **tangente de l'angle $\hat{C}$** :

$$\tan \widehat{ACH} = \frac{AH}{CH}$$

$$\tan 36° = \frac{3}{CH}$$

d'où $CH = \frac{3}{\tan 36°}$ donc **CH = 4,1 cm à 1 mm près**.

2) Calculons la longueur AC :

Dans le triangle CAH, rectangle en H, exprimons le **sinus de l'angle $\hat{C}$** :

$$\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC}$$

$$\sin 36° = \frac{3}{AC}$$

d'où $AC = \frac{3}{\sin 36°}$ donc **AC = 5,1 cm à 1 mm près**.

3) Calculons la mesure de l'angle $\widehat{ABH}$:

Dans le triangle ABH, rectangle en H, exprimons la **tangente de l'angle $\hat{B}$** :

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{HB}$$

d'où $\tan \widehat{ABH} = \frac{3}{4}$ donc **$\widehat{ABH}$ = 36,9° à 0,1° près**

4) Le triangle ABC pourrait être isocèle en A. Or, on sait que $\widehat{C}$ **= 36° et que** $\widehat{B}$ **= 36,9°**.
Les deux angles à la base du triangle ABC n'étant pas égaux, il n'est donc pas isocèle.

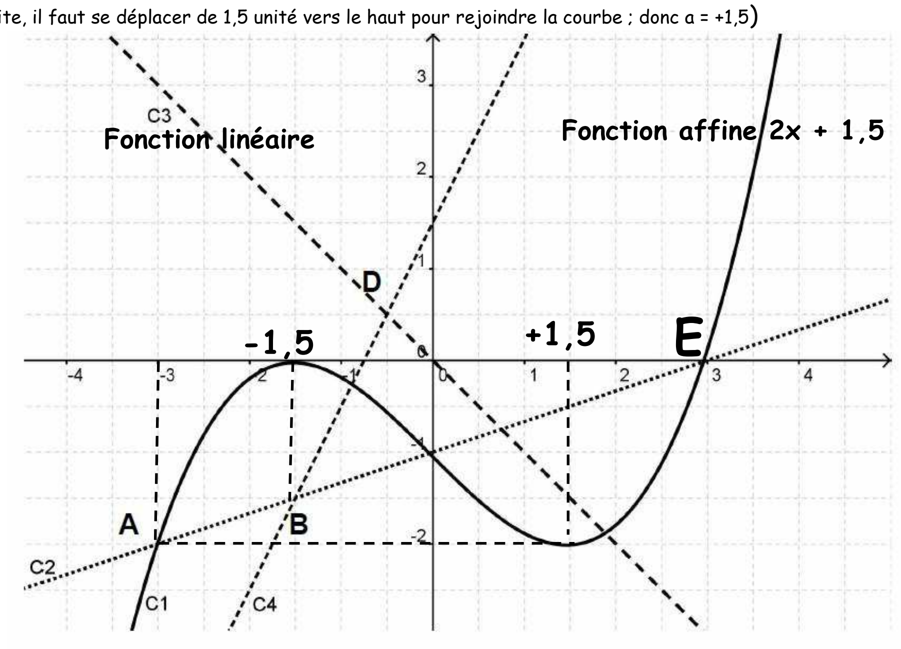
Autre démonstration possible: Dans un triangle rectangle, on sait que la hauteur issue du sommet principal est aussi médiane (c'est-à-dire que cette hauteur coupe la base en son milieu). Or, on sait que HB = 4 cm et que CH = 4,1 cm.

H n'étant pas le milieu du côté [CB], la hauteur [AH] n'est pas médiane et le triangle ABC n'est pas isocèle en A.

Exercice 3: ***Toutes réponses devaient être données par lecture graphique, sans justification***

1) **Coordonnées de A** : abscisse – 3 ; ordonnée - 2 **A(-3 ; -2)**
Coordonnées de D : abscisse – 0,5 ; ordonnée +0,5 **B(-0,5 ; +0,5)**
Le point B représente le point d'intersection des courbes C_1 et C_4.
2) L'image de 1,5 par la fonction ***g*** est **- 0,5**
3) Les antécédents de -2 par la fonction ***f*** sont **-3 et 1,5**
4) C'est la fonction $h(x)$ qui est **linéaire** car **sa représentation est une droite qui passe par l'origine du repère**.
Le point E à placer a pour coordonnées **(+3 ; 0)**.
5) La fonction dont la représentation graphique est définie par 2 x + 1,5 est C_4.
En effet, on peut lire graphiquement :

- **l'ordonnée à l'origine +1,5** où la courbe C_4 coupe l'axe (y'y) des ordonnées
- **le coefficient directeur de cette droite est 1,5** (à partir du point B par exemple, si on se déplace de 1 unité vers la droite, il faut se déplacer de 1,5 unité vers le haut pour rejoindre la courbe ; donc a = +1,5)



Problème

Partie A :

1) Le terrain est composé d'un rectangle et d'un triangle rectangle ayant le côté [BH] en commun.
Son aire $\mathcal{T}$ est :

$\mathcal{T}$ = Aire de ABHD + Aire de BHC

$\mathcal{T} = 15 \times 20 + \frac{20\times10}{2}$

$\mathcal{T} = 300 + 100$

$\boxed{\mathcal{T} = 400 \text{ m}^2}$ **Le terrain mesure 400m²**

2) L'aire de la maison doit faire moins de 30% du terrain donc ;

$\mathcal{A} = 400 \times 30\%$

$\boxed{\mathcal{A} = 120 \text{ m}^2}$

L'aire maximale que la maison peut avoir pour respecter la condition n° 2 est 120 m².

3) Calculons l'aire A de la maison dans les trois cas :
La maison est un rectangle donc :

$\mathcal{A}$ = EB x BG

$\mathcal{A}$ = (AB – AE) x (BH – GH)

a) si GH = 3,2 m $\mathcal{A}$ = (15 – 7)x(20 – 3,2)

$\mathcal{A}$ = 8 x16,8

$\boxed{\mathcal{A} = \mathbf{134{,}4\ m^2}}$

b) si GH = 10 m $\mathcal{A}$ = (15 – 7)x(20 – 10)

$\mathcal{A}$ = 8 x10

$\boxed{\mathcal{A} = \mathbf{80\ m^2}}$

c) si GH = 13 m $\mathcal{A}$ = (15 – 7)x(20 – 13)

$\mathcal{A}$ = 8 x7

$\boxed{\mathcal{A} = \mathbf{56\ m^2}}$

4) La maison devant avoir une aire supérieure à 60 m² (*condition n°1*) mais inférieure à 120 m² (*condition n° 2*),
la seule valeur de GH qui permette de respecter les deux conditions simultanément est b) GH = 10m.

Partie B :

1) Exprimons BG en fonction de x :

BG = BH – GH

BG = 20 – x

2) Exprimons l'aire de la maison en fonction de x:

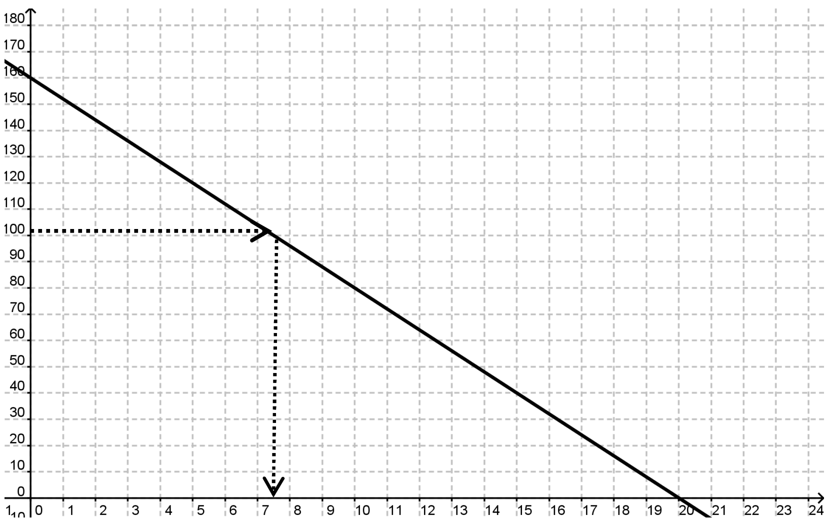
A = EB x BG

A = 8 x (20 – x)

A = 8x20 – 8 x x

A = 160 – 8x

3) La fonction $f(x) = 160 - 8x$ ou $f(x) = -8x + 160$ est de la forme $f(x) = ax + b$ dont **affine** (avec a = -8 et b = 160).
Sa représentation graphique est une droite ne passant pas par l'origine du repère.
L'ordonnée à l'origine est 160 donc la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; 160) .



Lecture graphique : **La valeur de x rendant l'aire de la maison égale à 100 m² est d'environ 7,5 m**.

Vérifions ce résultat par le calcul. Il faut chercher l'antécédent de 100 par la fonction f donc rechercher pour quelle valeur de x on a $f(x) = 100$. Cela conduit à résoudre l'équation :

$$\mathbf{160 - 8x = 100}$$

$$-8x = 100 - 160$$

$$-8x = -60$$

donc $\boxed{x = \dfrac{-60}{-8} = 7{,}5}$

La mesure de x permettant que l'aire de la maison soit égale à 100 m² est 7,5.