

TRAVAUX NUMERIQUES (14 points) :**Exercice 1 : (5 points)**

1) Calculer les expressions A, et B en faisant apparaître chaque étape du calcul et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{4}\right)}{\frac{5}{8}}$$

$$A = \frac{\left(\frac{10}{12} - \frac{15}{12}\right)}{\frac{5}{8}}$$

$$A = \frac{-\frac{5}{12}}{\frac{5}{8}}$$

$$A = -\frac{5}{12} \times \frac{8}{5}$$

$$A = -\frac{8}{12}$$

$$\boxed{A = -\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{8 \times 10^{15} \times 15 \times 10^{-6}}{20 \times (10^2)^5}$$

$$B = \frac{8 \times 15 \times 10^{15} \times 10^{-6}}{20 \times 10^{10}}$$

$$B = \frac{8 \times 15}{20} \times \frac{10^9}{10^{10}}$$

$$B = 6 \times 10^{-1}$$

$$B = \frac{6}{10}$$

$$\boxed{B = \frac{3}{5}}$$

2) Calculer C et D en donnant le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$C = \sqrt{15} \times \sqrt{10} = \sqrt{3 \times 5 \times 2 \times 5} = \boxed{5\sqrt{6}}$$

$$D = \sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27} = 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 2 \times 3\sqrt{3} = \boxed{6\sqrt{3}}$$

Exercice 2 : (4 points)

$$1) E = (3\sqrt{5} + 7)^2 = (3\sqrt{5})^2 + 2 \times 3\sqrt{5} \times 7 + 7^2 = 45 + 42\sqrt{5} + 49 = \boxed{94 + 42\sqrt{5}}$$

$$F = (x - 2\sqrt{2})(5x + 3\sqrt{2}) = 5x^2 + 3x\sqrt{2} - 10x\sqrt{2} - 12 = \boxed{5x^2 - 7\sqrt{2}x - 12}$$

2) Factoriser les expressions :

$$G = 16x^2 - 9$$

$$G = (4x)^2 - 3^2$$

$$\boxed{G = (4x + 3)(4x - 3)}$$

$$H = 9x^2 - 24x + 16$$

$$H = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$$

$$\boxed{H = (3x - 4)^2}$$

$$I = 4x^2 + 28x + 49$$

$$I = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2$$

$$\boxed{I = (2x + 7)^2}$$

Exercice 3 : (5 points)

1) f est quelconque, g est affine et h est linéaire

2) Déterminer les images par ℓ de

$$\ell(0) = -3 \times 0 + 7$$

$$\boxed{\ell(0) = 7}$$

$$\ell(-4) = -3 \times (-4) + 7$$

$$\ell(-4) = 12 + 7$$

$$\boxed{\ell(-4) = 19}$$

$$\ell\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \times \frac{5}{3} + 7$$

$$\ell\left(\frac{5}{3}\right) = -5 + 7$$

$$\boxed{\ell\left(\frac{5}{3}\right) = 2}$$

$$\ell(-\sqrt{2}) = -3 \times (-\sqrt{2}) + 7$$

$$\boxed{\ell(-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 7}$$

3) On cherche x tel que $k(x) = -5$ donc $2x - 3 = -5$

$$2x = -5 + 3$$

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$

Le nombre qui a -5 pour image par k est -1

TRAVAUX GEOMETRIQUES (12 points) :

Exercice 1 : (4 points)

1) Calculons séparément les quotients $\frac{IR}{IS}$ et $\frac{IP}{IT}$: $\frac{IR}{IS} = \frac{8}{10} = 0,8$; $\frac{IP}{IT} = \frac{4,8}{6} = 0,8$

Les rapports $\frac{IR}{IS}$ et $\frac{IP}{IT}$ étant égaux et les points I, R, S et I, P, T étant (alignés) dans le même ordre, en appliquant la **réciproque** du théorème de *Thalès*, on peut conclure que **les droites (RP) et (ST) sont parallèles**.

2) Calculons séparément les quotients $\frac{IM}{IT}$ et $\frac{IN}{IS}$: $\frac{IM}{IT} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; $\frac{IN}{IS} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

Les quotients ne sont pas égaux : en **appliquant le théorème de Thalès**, on peut conclure que **les droites (ST) et (MN) ne sont pas parallèles**.

Exercice 2 : (6 points)

1) Le triangle ACH est rectangle en H donc : $\tan \widehat{ACH} = \frac{AH}{CH}$; $\tan 36^\circ = \frac{3}{CH}$; **$CH = \frac{3}{\tan 36^\circ} = 4,1 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près}$**

2) $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC}$ donc $\sin 36^\circ = \frac{3}{AC}$ et **$AC = \frac{3}{\sin 36^\circ} = 5,1 \text{ cm à } 0,1 \text{ cm près}$**

3) $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{HB}$ donc $\tan \widehat{ABH} = \frac{3}{4}$ d'où **$\widehat{ABH} = 36,9^\circ$ au dixième**

4) - $\widehat{ACH} = 36^\circ$ et $\widehat{ABH} = 36,9^\circ$: les angles à la base ne sont pas égaux : **ABC n'est pas isocèle**
 ou - $CH = 4,1$ et $HB = 4$: la hauteur issue du sommet principal n'est pas médiatrice de la base
 ou - (Pythagore $\rightarrow AB = 5$: or $AC = 5,1 \text{ cm}$ donc $AC \neq AB$)

PROBLEME (12 points) :

1) Figure

2) Prouver que $AB = \sqrt{45}$ et que $BC = \sqrt{180}$

Le triangle ABO est rectangle en O, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AB^2 = 3^2 + 6^2$$

$$AB^2 = 9 + 36$$

$$AB^2 = 45$$

$$\boxed{AB = \sqrt{45}} \quad (= 3\sqrt{5} \text{ pas demandé})$$

Le triangle BOC est rectangle en O, le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$BC^2 = BO^2 + OC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + (15 - 3)^2$$

$$BC^2 = 36 + 12^2$$

$$BC^2 = 36 + 144$$

$$BC^2 = 180$$

$$\boxed{BC = \sqrt{180}} \quad (= 6\sqrt{5} \text{ pas demandé})$$

3) Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires. Dans le triangle ABC :

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = 15^2 = 225 \\ AB^2 + BC^2 = 45 + 180 = 225 \end{array} \right\} \text{ On remarque que } AB^2 + BC^2 = AC^2, \text{ donc d'après la réciproque du théorème de}$$

Pythagore, on peut conclure que le triangle ABC est rectangle en B : **(AB) est perpendiculaire à (BC)**.

4) a. **Construire le cercle** \mathcal{C} de diamètre [FC] qui recoupe la droite (BC) en H.

b. Démontrer que le triangle FHC est rectangle.

H appartient au cercle de diamètre [FC] donc **le triangle FCH est rectangle en H**

c. Démontrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

(AB) est perpendiculaire à (BC) (d'après 3) et (FH) est perpendiculaire à (BC) (d'après 4)b).

On sait que si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles donc

(AB) et (FH) sont parallèles

d. Calculer CF puis CH (à 0,1 cm près).

Les points A,O,F,C sont alignés dans cet ordre donc $CF = AC - AF = 15 - 6 = 9$. **CF = 9 cm**

Dans le triangle ABC, on sait que (AB) et (FH) sont parallèles donc le théorème de Thalès permet d'écrire :

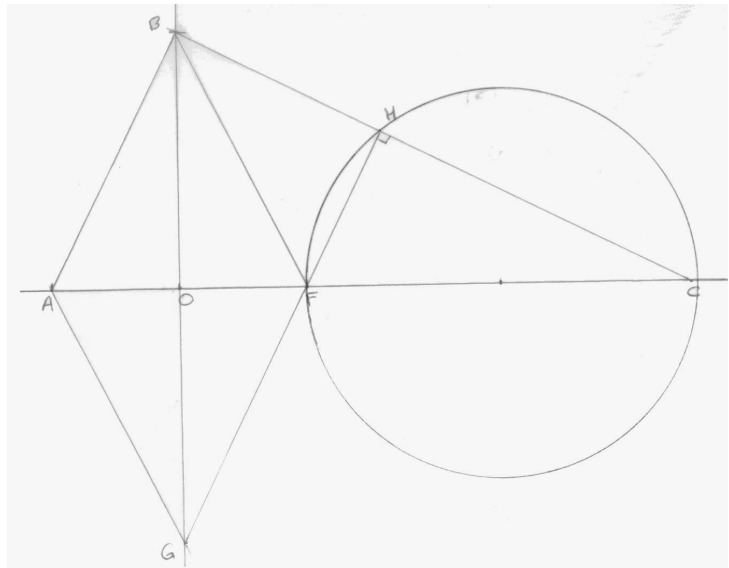
$$\frac{CH}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{FH}{AB}$$

$$\frac{CH}{\sqrt{180}} = \frac{9}{15}$$

$$CH = \frac{9 \times \sqrt{180}}{15}$$

$$CH = \frac{3}{5} \sqrt{180} \text{ cm}$$

CH = 8,0 cm à 0,1 cm près



5) Démontrer que le triangle BAF est isocèle.

On sait que O est le milieu de [AF] et que (OB) est perpendiculaire à (AF). Pour le triangle BAF, la hauteur relative au côté [AF] est aussi médiane :

le triangle ABF est isocèle de sommet principal B.

6) a. Tracer par A la parallèle à la droite (BF), elle coupe la droite (HF) en G.

b. Démontrer que le quadrilatère ABFG est un losange et en préciser son périmètre (à 0,1 cm près).

- On sait que (AB) et (FH) sont parallèles (d'après 4c)) et (BF) parallèle à (AG) (par construction).

Or, un quadrilatère ayant ses côtés opposés deux à deux parallèles est un parallélogramme donc **ABFG est un parallélogramme.**

- De plus, on sait que $AB = BF$ (d'après 5)

Or, un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange donc

ABFG est un losange.

Les quatre côtés d'un losange ont même longueur donc le périmètre de ABFG est

$$P = 4 \times \sqrt{45}$$

$$P = 4 \times 3\sqrt{5}$$

P = 12√5 cm = 26,8 cm à 0,1 cm près

7) Montrer que le triangle OBC a la même aire que le losange ABFG.

$$\text{Aire (OBC)} = \frac{OB \times OC}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \text{ cm}^2 \quad : \text{l'aire du triangle OBC fait } 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Aire (ABFG)} = \frac{AF \times BG}{2} = \frac{6 \times (2 \times 6)}{2} = 36 \text{ cm}^2 \quad : \text{l'aire du losange ABFG fait } 36 \text{ cm}^2$$

L'aire du losange et celle du triangle sont égales.